TD Dérivation

Calcul

B6Z **Exercice 1** 🏠 Déterminer une expression de la dérivée n-ième de

1. x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{ax+b}$
3. $\frac{1}{x^2-1}$
4. $x^2 e^x$
5. $e^x \sin x$
6. ★ arctan

Dérivabilité

KN6 **Exercice 2** 🪶🏠 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on note toujours f.
2. Ce prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

EG3 **Exercice 3** 🪶 Étudier la dérivabilité de la fonction suivante

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})$
2. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$

08P **Exercice 4** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n})$.
2. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$. Déterminer la fonction f en fonction de $f'(0)$.

GD5 **Exercice 5** 🪶 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $G : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\quad \forall x \neq 0, \quad G(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que G admet un prolongement par continuité en 0.
3. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0.
   Indication : *Chercher un $DL_1(0)$ de G.*

L2J **Exercice 6** ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.

Indication : *On ne peut pas sommer un nombre arbitraire de o.*

JMA **Exercice 7** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x, et $(x_n), (y_n)$ deux suites qui convergent vers x. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < x < y_n$, montrer que $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \to f'(x)$. **Ind** : *Plus simple : le cas où $x_n = x - \varepsilon_n$ et $y_n = x + \varepsilon_n$.*

KZB **Exercice 8** ★ ★ Fonction de Van der Waerden On note $\Delta(x) = d(x, \mathbb{Z})$ la distance de x à $\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n}.$$

1. Montrer que F est continue en tout point.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, en considérant deux suites $x_n < x < y_n$ judicieuses et $\frac{F(y_n)-F(x_n)}{y_n-x_n}$, montrer que F n'est pas dérivable en x.

Régularité

MUM **Exercice 9** 🪶🏠 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(x)x + F(x)^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5Z9 **Exercice 10** 🪶

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ (1 + x^2)f'(x) = -2xf(x)$. En déduire que
$$P_{n+1} + 2X(n+1)P_n + n(n+1)(1+X^2)P_{n-1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$
3. ★ Quelles sont les limites de $f^{(n)}(x)$ en $\pm\infty$? En déduire que P_n est scindé à racines simples.
   (Utilise la fin du chapitre.)

PTJ **Exercice 11** 🪶 On considère les fonctions $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ et $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ h(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que $\forall x \neq 0,\ h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$.
2. En déduire la limite de $h^{(n)}(x)$ quand $x \to 0^+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et tracer l'allure de son graphe.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. **Ind** : *Utilise la fin du chapitre.*
5. Donner l'expression d'une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $g(0) = 1$ et $\forall x \notin [-1, 1],\ g(x) = 0$.

N9T **Exercice 12** Soit $y : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $\forall t \geq 0,\ y'(t) = \cos(y(t)) + \cos(t)$.

1. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 0$. On suppose $\forall t \in [0, t_0],\ f(t) \geq 0$. Montrer que $f'(t_0) \leq 0$.
3. Montrer que si $y(0) \geq 0$ alors $\forall t \in [0, \pi],\ y(t) \geq 0$, puis (★), $\forall t \in [0, 2\pi],\ y(t) \geq 0$

32M **Exercice 13** Montrer que $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$ est dérivable à droite et à gauche en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

Indication : *Utilise la fin du chapitre.*

Fonctions dérivables

468 **Exercice 14** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une dérivable telle que $f(0)=0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer qu'il existe $c>0$ tel que $f'(c)=0$.

G6Z **Exercice 15** Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admettant n zéros. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f' - \alpha f$ admet au moins $n-1$ zéros.

Indication : *Interpréter $f' - \alpha f$ comme un facteur de la dérivée d'une certaine fonction g.*

79S **Exercice 16** Soient a, b deux réels distincts, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^4$.

1. On admet l'existence d'un polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3 tel que

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ P(b) = f(b),\ P'(b) = f'(b).$$

   Montrer qu'il est unique.

Soit $x \in \,]a,b[$. On considère $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto f(t) - P(t) - \lambda(t-a)^2(t-b)^2$, où λ est choisi de sorte que $\varphi(x) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(4)}(c) = 0$. En déduire une expression de $f(x) - P(x)$ en fonction de c.
   Indication : *La fonction φ vérifie $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b) = 0$ et $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$.*
3. En déduire que $\sup\limits_{[a,b]} |f-P| \leq \frac{(b-a)^4}{24\times 16} \sup\limits_{[a,b]} |f^{(4)}|$.

UMT **Exercice 17** ★ Théorème de Darboux

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
2. Donner un exemple d'une fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue.

Polynômes

599 **Exercice 18**

1. ♡ Montrer que si un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' l'est aussi
2. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, P' est scindé.
3. Donner un exemple d'un polynôme non scindé dont le polynôme dérivé est scindé à racines simples.
4. Soit $P = \prod\limits_{k=0}^{n} (X-k)$, quelle est la multiplicité maximale d'une racine de $P - c$ pour $c \in \mathbb{R}$?

FTJ **Exercice 19** Soit P un polynôme réel. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ a un nombre fini de solutions.

1CY **Exercice 20** ★

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, les racines de P_n appartiennent à $[-n,-1]$ et qu'il y en a une seule.
   Indication : *Procéder par récurrence, et utiliser $P_n = P_n' + \frac{x^n}{n!}$.*
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?

PWT **Exercice 21** ★ ★ Application de la dérivation discrète Soit Q un polynôme et k un entier positif tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $Q(n)$ soit la puissance k-ième d'un entier. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un polynôme P tel que $Q = P^k$.

1. On pose $f = Q^{\frac{1}{k}}$, montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $f^{(n)}$ tende vers 0 en $+\infty$.
   Indication : *On pourra éventuellement écrire $kQf' = fQ'$.*
2. On considère l'opérateur $\Delta : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$. Montrer que $\forall k \geq 0,\ \forall x,\ \exists \theta \in [0,1],\ \Delta^k f(x) = f^{(k)}(x + k\theta)$.
3. En déduire qu'une des dérivées de f doit être nulle à partir d'un certain rang. Conclure.

Limites

SKS **Exercice 22** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell > 0$.

1. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

HJG **Exercice 23** Règle de L'Hôpital

1. Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a \in I$, et dérivables sur $I \setminus \{a\}$ telles que $f(a) = g(a) = 0$, et $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Montrer que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. **Ind** : *S'inspirer de la preuve du théorème de la limite de la dérivée.*

Fonctions lipschitziennes

4KW **Exercice 24** Montrer que pour $a < b \in \,]0,1[$, $\quad \dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} \leq \arcsin b - \arcsin a \leq \dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$.

T5W **Exercice 25** ★ Inégalité de Kolmogorov

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup |f|$ et $M_2 = \sup |f''|$. Montrer que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.
   Indication : *Comprendre pourquoi f' ne peut pas prendre de grandes valeurs.*
2. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées par M_0 et M_n. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée par une constante ne dépendant que de M_0, M_n, n et k.